

# 타원혼합 레이놀즈응력 모형에 의한 정사각덕트 내 난류 MHD 유동해석

전인규, 박호용, 신종근, 곽동걸  
강원대학교

## Prediction of Turbulent MHD Flows in a Square Duct Using Elliptic-Blending Reynolds Stress Closure

In-Gyu Jeon, Ho-Yong Park, Jong-Keun Shin, Dong-Kurl Kwak  
Kangwon National University

### ABSTRACT

본 연구는 완전 발달된 정사각 덕트 내를 흐르는 난류 MHD 유동에서 자기장에 의해 평균속도와 레이놀즈응력을 포함한 난류 특성치들에 어떤 영향을 미치는지 분석하고자 수행되었다. Navier-Stokes 방정식과 MHD(magnetohydrodynamic) 방정식을 연계시킨 후, 로렌츠 효과를 포함시킨 타원-혼합 2차모멘트 난류모형으로 해석을 시도하였다. 예측된 결과들은 Chaudhary et al.이 계산한 DNS자료와 직접 비교하여, 예측 타당성을 검토하였다.

### 1. 서 론

자기장이 유동장에 적용되면 전류가 유도되고 이 전류와 자기장의 상호 작용으로 인해 로렌츠 힘이 생성되며, 이 로렌츠 힘은 흐름을 구속하고 속도장을 변화시키게 된다. 또한, 자기장은 난류 유동을 재층류화하고 난류의 구조를 크게 변경할 수 있기 때문에 자기장에 노출된 난류의 마찰 특성 및 혼합 현상은 자기장이 없는 흐름에 비해 크게 달라질 수 있게 된다.<sup>[1]</sup>

이러한 로렌츠 힘에 의한 유동 특성을 이해하고자, 본 연구에서는 완전발달 된 정사각덕트 내 난류 MHD 유동을 레이놀즈 평균된 Navier-Stokes 방정식 모형으로 해석을 시도하였다.

본 해석에서는 현재 만족할 만한 유동특성을 예측해주고 있는 Thielen et al.의 타원혼합 방정식<sup>[2]</sup>에 의한 레이놀즈응력 방정식 모형에 Kenjeres et al.<sup>[3]</sup>이 제안한 전자기 효과 항을 포함시켜 벽면을 인지시키는 경험함수를 사용하지 않으면서도 벽면 근방의 난류 MHD 유동을 비교적 정확하게 예측해 줄 수 있는지의 여부를 판단하게 된다.

### 2. 이론적 해석

#### 2.1 MHD 유동관련 운동량 방정식

MHD 유동을 기술하는 방정식들은 Navier-Stokes 운동량방정식, Maxwell 방정식 그리고 이동매체(moving media)에 대한 옴(ohm)의 법칙 등으로 구성된다.

이 방정식들의 결합은 운동량방정식에 식 (1)과 같이 유도되는 로렌츠 힘을 통해서 이루어진다.<sup>[3,4]</sup>

$$F_i^L = \frac{\sigma}{\rho} \left( -\epsilon_{ijk} B_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} + U_k B_i B_k - U_i B_k^2 \right) \quad (1)$$

여기서  $\Phi$ 는 전위(electric potential),  $\epsilon_{ijk}$ 는 퍼뮤테이션 텐서 그리고  $\sigma$ 는 전기전도율(electrical conductivity)을 나타낸다.

식 (1)에서 전위  $\Phi$ 는  $\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot (\mathbf{U} \times \mathbf{B})$  형태의 포아송 방정식으로부터 구해진다. 로렌츠 힘을 고려한 레이놀즈 평균된 운동을 나타내기 위한 운동량 방정식은 식 (2)와 같이 표현되고, 여기서  $\overline{u_i u_j}$ 는 난류응력 텐서이다.

$$\frac{DU_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \overline{u_i u_j} \right] + F_i^L \quad (2)$$

#### 2.2 난류유동 해석을 위한 타원-혼합 모형

2차모멘트 난류모형이 실제 공학적인 문제에 적용되기 위해서는 모형의 단순성과 편리성 외에 벽 근방 난류거동에 대한 물리적인 특성을 예측해 낼 수 있는 2개의 상반되는 능력을 동시에 갖추어야 한다.

이를 만족하는 모형이 Thielen et al.이 제안한 타원-혼합 2차모멘트 모형(EBM)이며, 이모형에 로렌츠 힘 효과가 포함된 레이놀즈응력 수송방정식은 식 (3)과 같이 표현된다.<sup>[2]</sup>

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \nu \delta_{kl} + C_s \overline{u_k u_l} \right) \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} + P_{ij} + \Phi_{ij}^* + S_{ij} - \epsilon_{ij} \quad (3)$$

여기서  $P_{ij}$ 는 난류생성을 나타내며 식 (4)와 같다.

$$P_{ij} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \quad (4)$$

$S_{ij}$ 는 본 연구에서 관심이 집중되고 있는 로렌츠 힘에 의한 생성을 나타내고 Kenjeres et al.<sup>[3]</sup> 따라 식 (5)와 같이 모형화된다.

$$S_{ij} = (1 - C_\lambda) \frac{\sigma}{\rho} \left( B_i B_k \overline{u_j u_k} + B_j B_k \overline{u_i u_k} - 2B_k^2 \overline{u_i u_j} \right) \quad (5)$$

식 (5)에서  $C_\lambda$ 는 Kenjeres et al.<sup>[3]</sup>이 제안한 상수 0.6을 채택하였다. 또한, 식 (3)에서  $\Phi_{ij}^*$ 는 속도-압력구배(velocity-pressure gradient) 상관관계,  $\epsilon_{ij}$ 는 소멸항을 나타내는데, EBM은 이들을 식 (6)과 식 (7)과 같이 각각 모형화 한다.

$$\Phi_{ij}^* = (1 - \psi^2)\Phi_{ij}^w + \psi^2\Phi_{ij}^h \quad (6)$$

$$\epsilon_{ij} = (1 - \psi^2)\frac{u_i u_j}{k}\epsilon + \psi^2\frac{2}{3}\epsilon\delta_{ij} \quad (7)$$

이 모형들에서 스칼라  $\psi$ 를 구하기 위하여 식 (8)과 같은 1개의 타원 미분방정식을 풀기 때문에 모형의 타원성을 유지할 수가 있게 된다.

$$\psi - L^2 \nabla^2 \psi = 1 \quad (8)$$

한편, 소멸률 방정식에 대해서도 식 (9)와 같이 로렌츠 힘에 의한 효과를 추가하여 적용하였다.

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \nu \delta_{kl} + C_{\epsilon} \overline{u_k u_l} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} + C_{\epsilon 1} \frac{(P_{kk} + G_{kk})}{2T} - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon}{T} + C_{\epsilon 3} \frac{1}{2T} S_{kk} \quad (9)$$

식 (9)에서 모형계수  $C_{\epsilon 1}$ 은 식 (10)과 같이 수정된다.

$$C_{\epsilon 1} = C_{\epsilon 1}^o \left( 1 + 0.03(1 - \psi^2) \sqrt{\frac{k}{u_i u_j n_i n_j}} \right) \quad (10)$$

한편, 모형계수  $C_{\epsilon 3}$ 은 DNS자료를 근간으로 하여  $C_{\epsilon 3} = 1.75$ 로 조율하여 적용하였다.

위에 언급된 난류모형들에 사용된 시간척도  $T$  및 길이척도  $L$ 은 Kolmogorov 시간척도 및 길이척도로 제한되었다.<sup>[2]</sup> 식 (6)에서 벽근방 모형  $\Phi_{ij}^w$ 와 유동중심부의 균질 난류유동에 대한  $\Phi_{ij}^h$ , 그리고 EBM에 의한 2차모멘트 난류모형의 모형계수는 참고문헌에 남긴다.<sup>[2]</sup>

### 3. 수치해석

본 해석에서 사용한 전산해석 프로그램은 주유동방향의 대류와 확산을 배제한 이산화 방정식을 바탕으로 하였으며, 이러한 방법의 적용은 진진해법(forward marching procedure)을 한 단면에서 반복 계산법으로 연속방정식이 만족될 때까지 종속변수 값들을 다시 계산하는 방법이 된다. 계산격자는 유동단면에 대해서 100×100개의 격자를 구성하였으며 벽면에서 첫 번째 위치한 격자는  $y^+ \leq 0.5$ 가 되게 하였다. 수송방정식의 차분화는 유동 단면의 U, V 방정식의 대류항에 대하여 QUICK 해법을 기타 방정식에 대해서는 HYBRID 해법을 적용하였으며, 압력수정은 SIMPLE 알고리즘을 사용하였다.

경계조건으로는 벽면에서 평균속도 및 레이놀즈응력들에 대해서는 No-slip 조건을  $\epsilon$ 에 대해서는 등방성 소멸률이 0이 되는 조건을 적용하였으며, 전위  $\Phi$ 에 대해서는 벽면에서 수직구배가 0이 되도록 하였다. 출구조건에 대해서는 완전 발달된 유동이라고 보아 Newmann 조건을 적용하였다.

### 4. 결과 및 고찰

그림 1은 각각 수평 이등분선과 수직 이등분선을 따라 예측된 흐름방향 무차원 평균속도를 보여주고 있으며, 전반적으로 DNS 결과<sup>[1]</sup>를 잘 따르고 있다. 수직 이등분선을 따른 평균속

도는 수평 이등분선을 따른 경우보다 중심부에서 더 낮게 예측되었음을 볼 수 있는데, 이러한 예측 값이 발생한 이유는 자기장이 하단에서 상단방향으로 작용하여 측벽 방향보다 상하단 방향으로 난류를 억제하기 때문인 것으로 판단된다. 자기장이 없는 경우에 비해 수직 이등분선을 따른 평균속도는 수평 이등분선을 따른 경우보다 중심부에서 더 낮은 분포로 예측된 것을 볼 수 있는데, 이 이유는 Ha=21.2에서 측벽 근처보다 상단 및 하단 벽에 가까운 곳에서 속도 평탄화 없이 난류를 강력하게 억제하기 때문이다.

그림 2는 수평 및 수직 이등분선을 따라 예측된 흐름방향 레이놀즈응력( $w$ ) 분포를 보여준다. 이 예측 결과로부터 자기장이 난류를 억제하는 효과를 덕트 중심부와 수직 이등분선을 따라 위쪽 벽 근처에서 명확하게 볼 수 있다. Ha=21.2에서 위쪽 벽 근처의 흐름방향 레이놀즈응력( $w$ ) 분포는 피크 위치가 덕트 중심부로 약간 이동하면서 자기장이 없는 경우에 비해 약 30% 정도 더 억제되고 있다. 이러한 예측 결과들은 두 이등분선을 따라 난류가 동시에 억제되는 모습을 보여주고 있으며, 이는 DNS 결과<sup>[1]</sup>와 비교적 잘 일치하고 있음을 보인다.

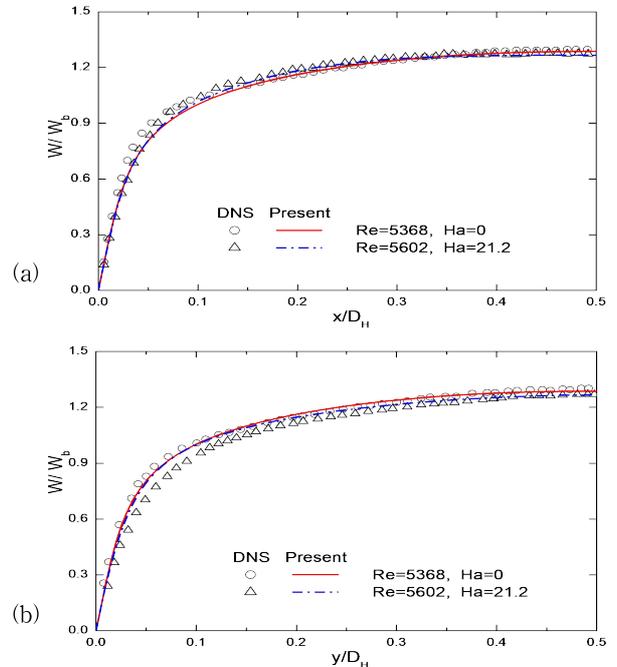


그림 1 수평이등분선(a) 및 수직이등분선(b)을 따르는 흐름 방향 평균속도

Fig. 1 Streamwise Mean Velocity Profiles Along (a) Horizontal Bisector, (b) Vertical Bisector

그림 3은 이등분선을 따라 예측된 수평방향 레이놀즈응력( $u$ ) 분포와 수직방향 레이놀즈응력( $v$ ) 분포를 보여준다. 자기장이 덕트의 상단 및 하단 벽에서 작용하기 때문에 수평 및 수직방향 레이놀즈응력 분포들은 이러한 위치에서도 강하게 억제되는 것을 알 수 있다. 자기장이 없는 경우에 비해 Ha=21.2에서 예측된 본 해석 결과들은 DNS와 다소 차이가 있으나, 그 변화 경향은 DNS 분포를 그대로 추종하고 있음을 알 수 있다.

그림 4는 수평 및 수직 이등분선을 따라 예측된 레이놀즈 전단응력( $uw$  및  $vw$ ) 분포를 나타낸다. 자기장이 레이놀즈 수직응력( $w, u, v$ )에 미치는 영향과 유사하게 레이놀즈 전단응력( $vw$ )도 수직 이등분선을 따라 상단 및 하단 벽 근처에서 상당

히 강하게 억제되고 있으나, 측벽 근처에서  $uw$ 의 억제는 다소 약하게 작용하는 것을 본 해석결과는 보여준다.

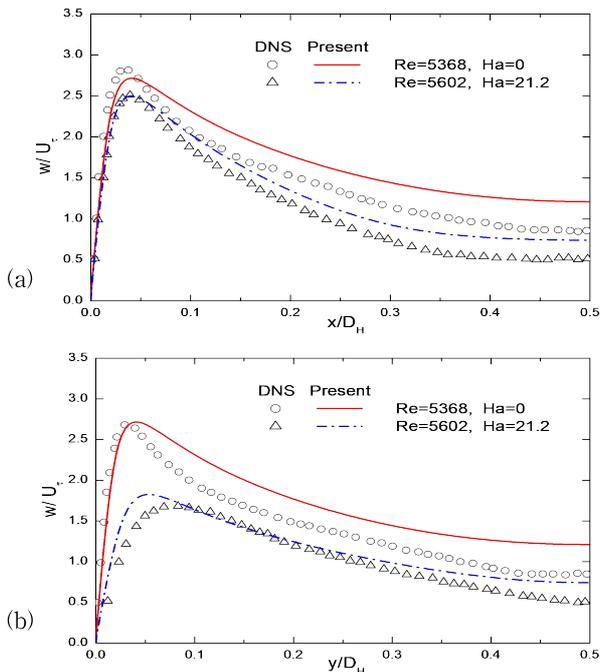


그림 2 수평이등분선(a) 및 수직이등분선(b)을 따르는 흐름 방향 레이놀즈응력 분포  
Fig. 2 Streamwise Reynolds Stress Distribution Along (a) Horizontal Disector, (b) Vertical Disector

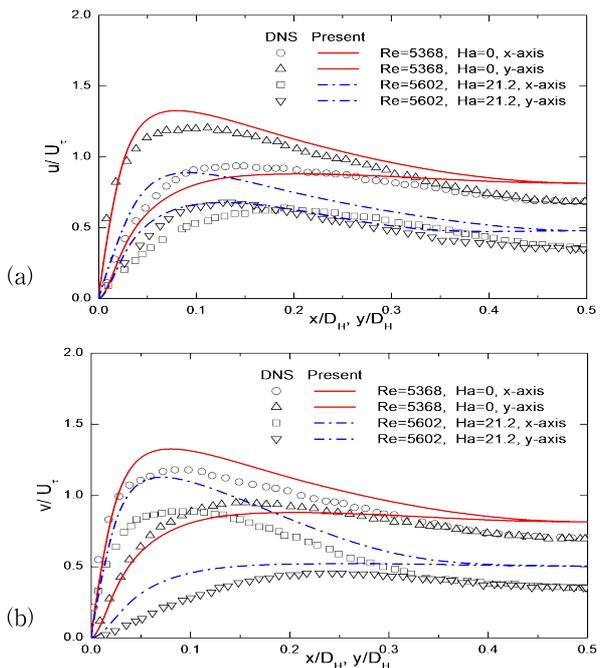


그림 3 수평이등분선 및 수직이등분선을 따른 x-방향 및 y-방향 레이놀즈 응력 분포  
Fig. 3 X-Direction (a) and Y-Direction (b) Reynolds Stress Distributions Along Horizontal and Vertical Bisectors

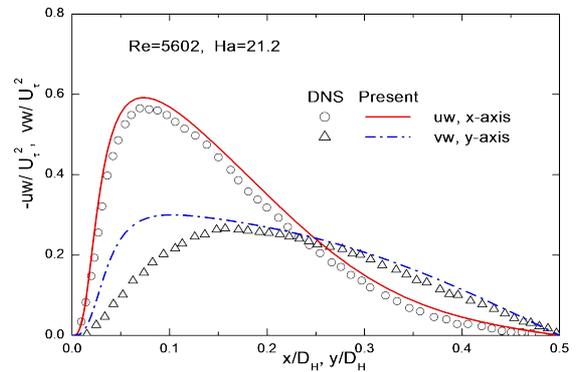


그림 4 수평이등분선을 따르는 레이놀즈 전단응력  $-uw$  및 수직이등분선을 따르는 레이놀즈 전단응력  $vw$  분포  
Fig. 4 Reynolds Shear Stress  $-uw$  Distribution Along Horizontal Bisector and Reynolds Shear Stress  $vw$  Distribution Along Vertical Bisector

본 논문은 2024년 국립대학육성사업 프로그램 지원을 받아 수행되었음.

### 참고 문헌

- [1] R. Chaudhary, S.P. Vanka, and B.G. Thomas, Direct Numerical Simulations of Magnetic Field Effects on Turbulent Flow in a Square Duct. Continuous Casting Report, June 7, 2010.
- [2] L. Thielen, K. Hanjalic, H. Jonker and R. Manceau. Prediction of flow and heat transfer in multiple impinging jets with an elliptic-blending second-moment closure. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 48, 1583-1598, 2004.
- [3] S. Kenjeres, K.Hanjalic and D. Bal. A direct-numerical-simulation-based second moment closure for turbulent magnetohydrodynamic flows. *Phys. Fluids.*, 16, 2004.
- [4] D.R. Wilson, T.J. Craft and H. Iacovides. Application of Reynolds stress transport turbulence closure models to flow affected by Lorentz and buoyancy forces. *Int. J. Heat Fluid Flow*. 55, 180 - 197, 2015.